Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 9

Problema 1. Una varilla delgada (forma cilíndrica) de dieléctrico de sección transversal A se extiende sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$. La polarización de la varilla es a lo largo de su longitud, y está dada por $\vec{P} = (ax^2 + b)\hat{\imath}$. Encuentre la densidad volumétrica de carga de polarización y la carga superficial de polarización en cada extremo. Demuestre explícitamente que la carga total de polarización se anula en este caso.

Las densidades de cargas vienen dadas por:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + b) = -2ax$$

Para la densidad de carga superficial de polarización existen 3 áreas:
Las dos tapas de la varilla:

$$S_1: \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = (a0^2 + b)\hat{\imath} \cdot -\hat{\imath} = -b$$
$$S_2: \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = (aL^2 + b)\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = aL^2 + b$$

El manto de la varilla:

$$S_3: \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = (aL^2 + b)\hat{\imath} \cdot \hat{r} = 0$$

Para encontrar la carga de polarización integramos

$$Q = \int \rho_P \, dV + \oint \sigma_P \, dA = \int \rho_P \, dV + \int_{S_1} \sigma_P \, dA + \int_{S_2} \sigma_P \, dA + \int_{S_3} \sigma_P \, dA = -2aA \int_0^L x \, dx - bA + A(aL^2 + b)$$
$$Q = -aAL^2 - bA + aAL^2 + bA = 0$$

Problema 2. En el centro de una cavidad esférica de radio a en un bloque de material dieléctrico infinito de constante κ, se coloca una carga puntual q. Calcule los vectores campo eléctrico y polarización del medio a distancia r de la carga puntual. Demuestre que la suma de las cargas inducidas y la carga libre es $\frac{q}{\kappa}$.

Por la ley de Gauss para dieléctrico

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{libre}$$

Por simetría el desplazamiento eléctrico tiene dirección radial $(\forall r)$

$$4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

En la cavidad $(r < a)$ no hay dieléctrico por lo que el vector polarización es cero $\left(\vec{P} = \vec{0}\right)$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Para la región donde hay dieléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(\chi_e + 1)\vec{E} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}$$

Luego

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{q}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

De la definición de desplazamiento eléctrico se tiene:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} - \frac{q}{4\pi\kappa r^2}\hat{r} = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2}\hat{r}$$

La densidad de carga de polarización

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\vec{\nabla}\cdot\frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2}\hat{r}$$

Usando la divergencia en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\rho_P = -\frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

Para la densidad de carga superficial de polarización

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa a^2}\hat{r}\cdot -\hat{r} = -\frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa a^2}$$

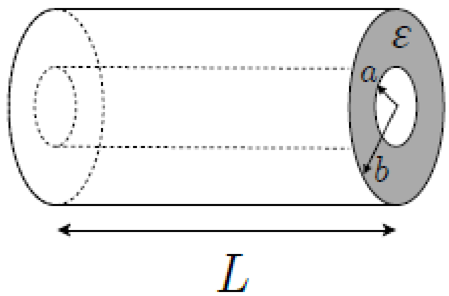
Luego la carga total de polarización

$$Q_{pol} = \int \rho_P\, dV + \oint \sigma_P\, dA = -\frac{q(\kappa - 1)}{\kappa}$$

Finalmente, la carga total del sistema

$$Q = Q_{pol} + Q_{libre} = -\frac{q(\kappa - 1)}{\kappa} + q = \frac{q}{\kappa}$$

Problema 3. Considere dos cilindros coaxiales conductores de largo L y radios a y b, respectivamente, con $a < b$. Entre los cilindros se encuentra un material dieléctrico de permitividad ε. El conductor interno tiene carga libre $+Q$, mientras que el conductor externo tiene carga libre $-Q$. No existen cargas libres en el material dieléctrico.



(a) Encuentre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico en todo el espacio. Desprecie efectos de borde.

(b) Calcule la capacitancia por unidad de largo.

(c) Si la densidad de carga polarizada en la superficie externa del dieléctrico es σ_b, calcule la densidad de carga polarizada en la superficie interna del dieléctrico σ_a en función de σ_b, a y b.

(a) Por la ley de Gauss para dieléctricos

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{libre} \quad \Rightarrow \quad 4\pi r L D = q_{libre} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi L r}\hat{r}$$

De la relación entre desplazamiento eléctrico y campo eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} = \frac{q}{4\pi L \varepsilon r}\hat{r}$$

(b) De la definición de capacitancia

$$C = \frac{Q}{V}$$

V se encuentra por su definición

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi L \varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{q}{4\pi L \varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Reemplazando eso en la definición de capacitancia

$$C = \frac{Q}{V} = q \cdot \frac{4\pi L\varepsilon}{q\ln(b/a)} = \frac{4\pi L\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{L} = \frac{4\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

(c) Calculemos σ_b y σ_a según la definición. Pero primero debemos calcular el vector polarización $\vec{P}$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{q}{4\pi Lr}\hat{r} - \frac{q\varepsilon_0}{4\pi L\varepsilon r}\hat{r} = \frac{q}{4\pi Lr}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{r}$$

Para el cilindro exterior

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{q}{4\pi Lb}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{q}{4\pi Lb}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

Para el cilindro interior

$$\sigma_a = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{q}{4\pi La}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{r} \cdot -\hat{r} = -\frac{q}{4\pi La}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

Dividiendo las dos últimas ecuaciones

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = -\frac{b\sigma_b}{a}$$